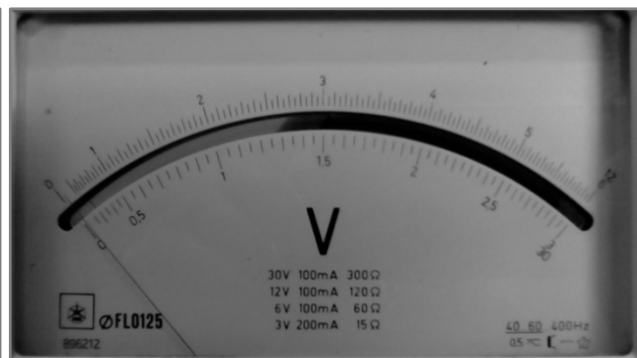
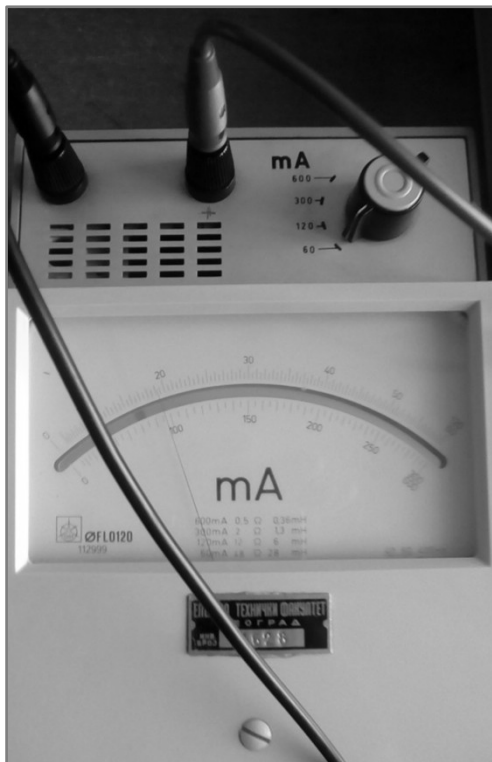


Merni sistemi u računarstvu 13E053MSR, <https://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr>

Univerzitet u Beogradu - Elektrotehnički fakultet, <http://www.etf.bg.ac.rs/>

Analogni instrumenti – zadaci I



Dr Nadica Miljković, vanredni profesor, nadica.miljkovic@etf.bg.ac.rs

U Beogradu, novembra 2022. godine

NAPOMENA: Instrumenti na slikama su fotografisani na Elektrotehničkom fakultetu, Univerziteta u Beogradu.

Zadaci za rad sa rešenjima

1. Kolike su srednja vrednost i efektivna vrednost prostoperiodičnog signala $u(t) = U \sin \omega t$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)?

Rešenje 1. zadatka:

Srednja vrednost se računa prema formuli:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt,$$

a efektivna vrednost se računa prema formuli:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt},$$

pa se srednja vrednost može naći rešavanjem integrala, na sledeći način:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T U \sin \omega t dt = \frac{U}{T} \int_0^T \sin \omega t dt = \frac{U}{\omega T} (-\cos \omega t) \Big|_0^T$$

$$U_{sr} = \frac{U}{\omega T} \left(-\cos 2\pi \frac{1}{T} T + \cos 2\pi \frac{1}{T} 0 \right) = \frac{U}{\omega T} (-1 + 1) = 0$$

Konačno, srednja vrednost prostoperiodičnog signala U_{sr} je jednaka 0.

Efektivna vrednost se dobija rešavanjem sledećeg integrala:

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 \sin^2 \omega t dt} = \sqrt{\frac{U^2}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t dt},$$

i uvodi se sledeća smena $\sin^2 \omega t = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t)$, pa se sada gornji izraz može zapisati kao:

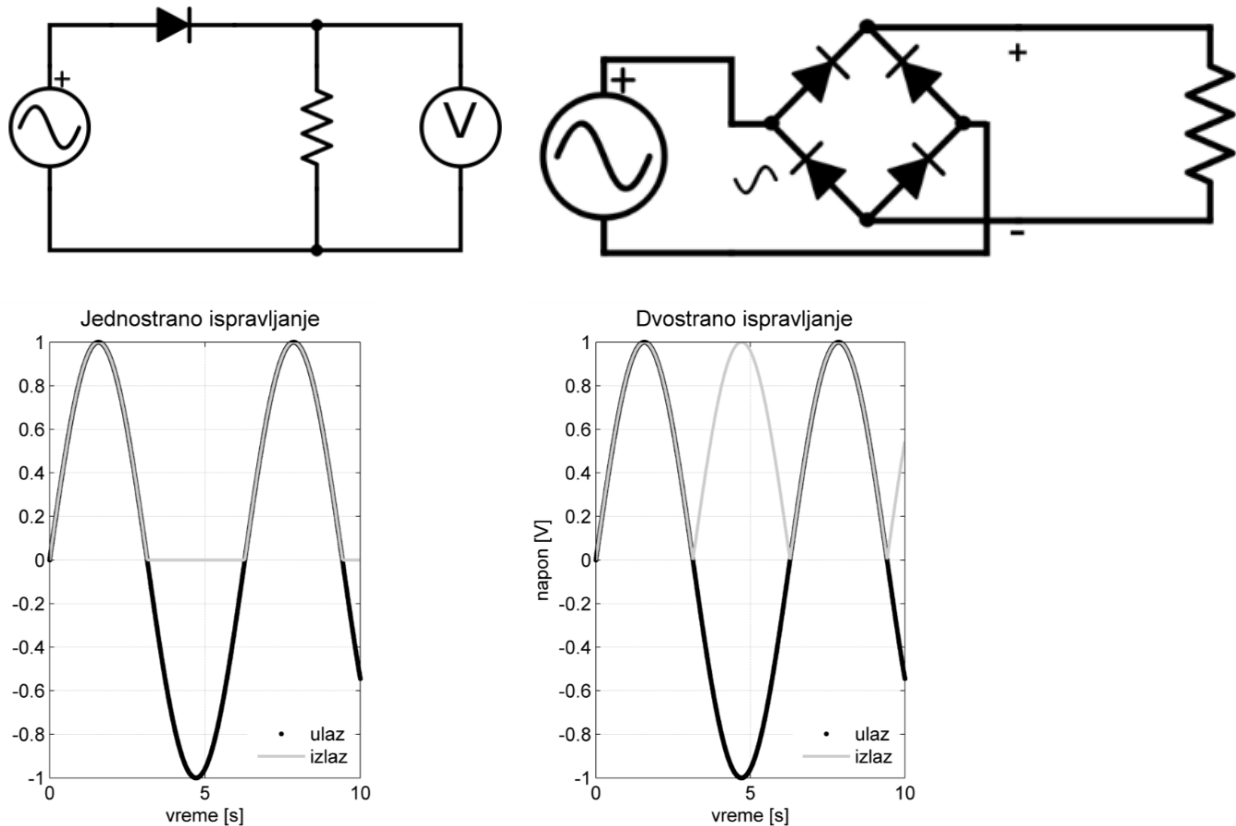
$$\begin{aligned} U_{eff} &= \sqrt{\frac{U^2}{T} \int_0^T \frac{1}{2}(1 - \cos 2\omega t) dt} = \sqrt{\frac{U^2}{2T} \int_0^T dt - \frac{U^2}{2T} \int_0^T \cos 2\omega t dt} \\ &= \sqrt{\frac{U^2}{2T}(T - 0) - \frac{U^2}{4\omega T}(\sin 2\omega t) \Big|_0^T} \end{aligned}$$

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{U^2}{2} - \frac{U^2}{4\omega T} \left(\sin 4\pi \frac{1}{T} T - \sin 4\pi \frac{1}{T} 0 \right)} = \sqrt{\frac{U^2}{2} - \frac{U^2}{4\omega T}(0 - 0)} = \frac{U}{\sqrt{2}}$$

Konačno, efektivna vrednost prostoperiodičnog signala U_{eff} je jednaka $\frac{U}{\sqrt{2}}$.

2. Kako bi se omogućilo merenje napona kod prostoperiodičnih signala primenom instrumenta sa pokretnim kalemom (koji meri srednju vrednost signala tj. DC vrednost od eng. *Direct Current*), koriste se

ispravljači zasnovani na primeni dioda. Postoje jednostrana i dvostrana ispravljačka kola (pogledati Sl. 1). Koliko je pokazivanje instrumenta sa pokretnim kalemom, kada se na njega dovede jednostrano i dvostrano ispravljen prostoperiodični signal $u(t) = U \sin \omega t$ ($\omega = \frac{2\pi}{T}$)?



Sl. 1. Na levom panelu je prikazano kolo za jednostrano ispravljanje, a na desnom panelu kolo za dvostrano ispravljanje. Na donjim panelima su prikazani odgovarajući rezultujući signali za jednostrano i dvostrano ispravljanje prostoperiodičnog napona. Slike su preuzete iz udžbenika: N. Miljković, Metode i instrumentacija za električna merenja, Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, 2016, ISBN: 978-86-057-2, doi: [10.5281/zenodo.1335250](https://doi.org/10.5281/zenodo.1335250)

Rešenje 2. zadatka:

Za jednostrano ispravljen signal, srednja vrednost je jednaka:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} U_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Kada se u prethodni izraz uvede smena, odnosno rešavanjem ovog integrala po $\frac{2\pi}{T} t$, dobija se:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) d\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \left(-\cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} 0\right) \right) = \frac{U_0}{2\pi} (1 + 1)$$

Konačno, srednja vrednost napona za prostoperiodičan jednostrano ispravljen signal je jednaka $\frac{U_0}{\pi}$.

Za dvostrano ispravljen signal, srednja vrednost je jednaka:

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_0 |\sin(\omega t)| dt = \frac{1}{T} U_0 \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(-\sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \right) dt + \frac{1}{T} U_0 \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) dt$$

Kada se u prethodni izraz uvede smena, odnosno rešavanjem ovog integrala po $\frac{2\pi}{T} t$, dobija se:

$$U_{sr} = -\frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) d\left(\frac{2\pi}{T} t\right) + \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \int_0^{\frac{T}{2}} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) d\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

$$U_{sr} = \frac{1}{T} U_0 \frac{T}{2\pi} \left(\cos\left(\frac{2\pi}{T} 0\right) - \cos\left(-\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{2}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{T} 0\right) \right) = \frac{U_0}{2\pi} (1 + 1 + 1 + 1)$$

Konačno, srednja vrednost napona za prostoperiodičan dvostrano ispravljen signal je jednaka $\frac{2U_0}{\pi}$, što je i bilo očekivano (i sa grafika) tj. da je srednja vrednost za dvostrano ispravljen signala duplo veća od srednje vrednosti za jednostrano ispravljen signal.

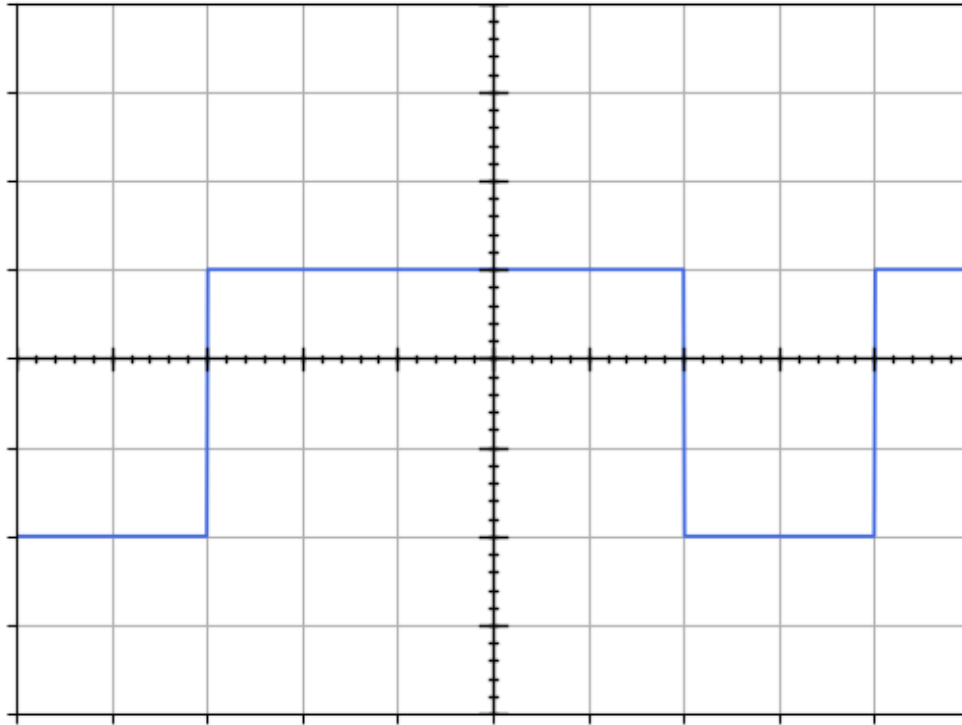
NAPOMENA o konstrukciji instrumenta (u 2. zadatku):

Kako bi instrument sa pokretnim kalemom mogao da meri efektivnu, a ne srednju vrednost signala, pre priključenja signala (struje ili napona) na ulaz instrumenta, signal se vodi na ispravljačka kola tj. na kolo za jednostrano ili na kolo za dvostrano ispravljanje.

Kako bi otklon kazaljke bio srazmerna efektivnoj, a ne srednjoj vrednosti signala, definiše se "faktor oblika" kao $k_f = \frac{U_{eff}}{U_{sr}}$. Skala instrumenta se gradiše prema ovom faktoru za merenje prostoperiodičnih signala (za jednostrano ispravljanje to je $k_f \approx 2.22$, a za dvostrano $k_f \approx 1.11$).

Sve prethodne relacije, osim što važe samo za prostoperiodični napon, one važe i za idealne diode. Kako je ranije već rečeno, relana dioda ne provodi idealno struju. Prema tome, može doći do greške u odnosu na vrednosti koje su određene prethodnim relacijama prilikom merenja napona i struje voltmetrom ili ampermetrom sa pokretnim kalemom.

3. Koja vrednost će biti prikazana na instrumentu, ako je na ulaz instrumenta sa pokretnim kalemom doveden pravougaoni signal kao na Sl. 2. Ako se ovaj signal dovodi na ulaz kola za dvostrano ispravljanje, koliki će biti odnos efektivne vrednosti signala i srednje vrednosti dvostrano ispravljenog signala?



Sl. 2, Signal koji se dovodi na ulaz instrumenta sa pokretnim kalemom je prikazan na osciloskopu. Smatrati da je preklopnik za podelu naponske ose podešen na 1 V/DIV, a da je nulti nivo napona postavljen na centralnu liniju graduacije ekrana.

Rešenje 3. zadatka:

Za signal sa Sl. 2 može se napisati sledeći izraz:

$$v(t) = \begin{cases} 1 \text{ V} & t \in \left(0, \frac{5}{7}T\right) \\ -2 \text{ V} & t \in \left(\frac{5}{7}T, T\right) \end{cases}'$$

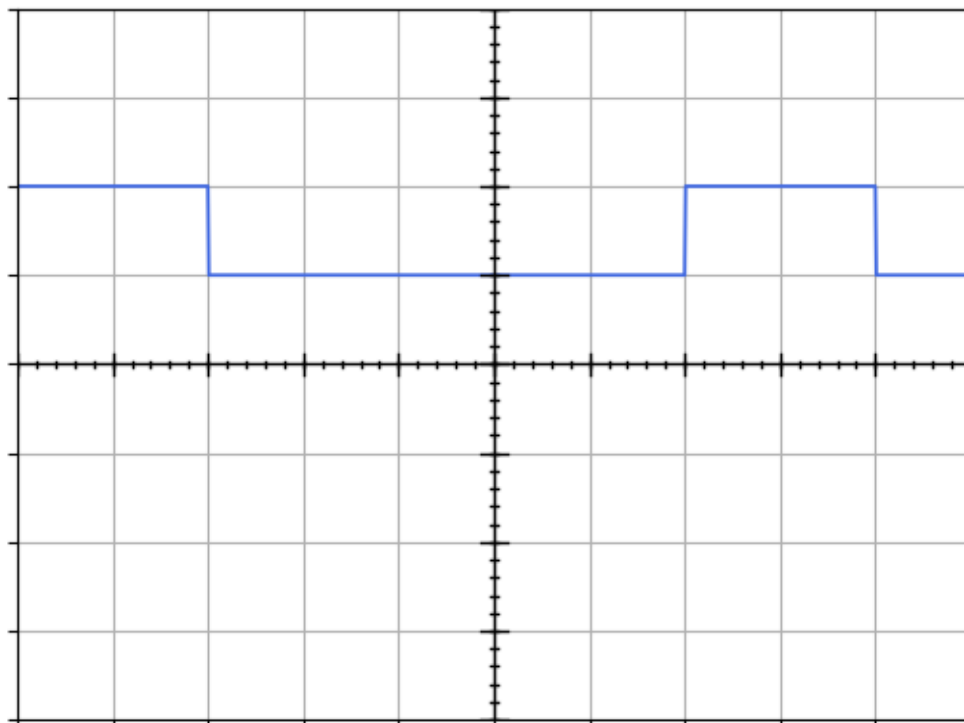
pa se, prema formuli za srednju vrednost, dobija sledeća relacija:

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{5}{7}T} (1 \text{ V}) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{5}{7}T}^T (-2 \text{ V}) dt$$

$$V = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{7}T - 0 \right) - \frac{2}{T} \left(T - \frac{5}{7}T \right) = \frac{5}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7} \text{ V}$$

$$V = 0.14 \text{ V}$$

Ako se signal sa Sl. 2 dovede na ulaz kola za dvostrano ispravljanje, tada signal izgleda kao na Sl. 3.



Sl. 3, Dvostrano ispravljen signal sa Sl. 2.

Za signal sa Sl. 3 može se napisati sledeći izraz:

$$v(t) = \begin{cases} 1 \text{ V} & t \in \left(0, \frac{5}{7}T\right) \\ 2 \text{ V} & t \in \left(\frac{5}{7}T, T\right) \end{cases},$$

pa se, prema formuli za srednju vrednost, dobija sledeća relacija:

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{5}{7}T} (1 \text{ V}) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{5}{7}T}^T (2 \text{ V}) dt$$

$$V = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{7}T - 0 \right) + \frac{2}{T} \left(T - \frac{5}{7}T \right) = \frac{5}{7} + \frac{4}{7} = \frac{9}{7} \text{ V}$$

$$V = 1.28 \text{ V}$$

Ako se isti signal jednostrano ispravi, onda se za takav signal može napisati sledeći izraz:

$$v(t) = \begin{cases} 1 \text{ V} & t \in \left(0, \frac{5}{7}T\right) \\ 0 \text{ V} & t \in \left(\frac{5}{7}T, T\right) \end{cases},$$

pa je njegova srednja vrednost jednaka:

$$V = \frac{1}{T} \int_0^T v(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{5}{7}T} (1 \text{ V}) dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{5}{7}T}^T (0 \text{ V}) dt$$

$$V = \frac{1}{T} \left(\frac{5}{7}T - 0 \right) = \frac{5}{7} \text{ V}$$

$$V = 0.71 \text{ V}$$

Dodatno za 3. zadatak:

Može se proveriti da li faktor oblika za jednostrano i za dvostrano ispravljanje važi i za ovaj signal. Potrebno je izračunati efektivnu vrednost signala kao:

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T v^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^{\frac{5}{7}T} (1 \text{ V})^2 dt + \frac{1}{T} \int_{\frac{5}{7}T}^T (-2 \text{ V})^2 dt}$$

$$V_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \left(\frac{5}{7}T - 0 \right) + \frac{4}{T} \left(T - \frac{5}{7}T \right)} = \sqrt{\frac{5}{7} + \frac{8}{7}} = \sqrt{\frac{13}{7}} \text{ V}$$

$$V_{eff} = 1.36 \text{ V}$$

Faktor oblika za jednostrano ispravljanje kod ovog signala je $1.36 \text{ V} / 0.71 \text{ V} = 1.91$, a za dvostrano ispravljanje je $1.36 \text{ V} / 1.28 \text{ V} = 1.06$.

Ovo znači da, ako bi se koristio instrument sa pokretnim kalemom sa ispravljačkim kolima za merenje efektivne vrednosti napona sa Sl. 2, onda bi došlo do greške.

4. Neka se za merenje analognog naponskog signala čija je amplituda u opsegu $[0 \text{ } 5] \text{ V}$ koristi A / D kartica NI USB 6212 (National Instruments Inc., Austin, USA) koja se može pogledati na [http://s7d5.scene7.com/is/image/ni/02080802_1204?\\$ni-card-md\\$](http://s7d5.scene7.com/is/image/ni/02080802_1204?$ni-card-md$) (pristupljeno 7. novembra 2022). Ova kartica na analognim ulazima AI (eng. analog input) može da meri u opsegu $[-10 \text{ } 10] \text{ V}$ sa rezolucijom od 16 bita. Koliki je korak kvantizacije i kako se može smanjiti korak kvantizacije i povećati rezolucija ove kartice?

Rešenje 4. zadatka:

Korak kvantizacije je $20 \text{ V} / 2^{16} \approx 0.3 \text{ mV}$. Međutim, ovaj korak kvantizacije se može smanjiti dodatnim podešavanjem prilikom merenja sa ovom karticom tako da se svih 16 bita iskoristi na opsegu koji odgovara ulaznom signalu, pa je novi korak kvantizacije jednak $5 \text{ V} / 2^{16} \approx 0.08 \text{ mV}$.

5. Za instrument sa pokretnim kalemom koji može da meri maksimalnu struju od $I_{max} = 10 \text{ mA}$, a poseduje unutrašnju otpornost $R_A = 300 \Omega$, odrediti vrednosti šantova i vrednosti "novih" unutrašnjih

otpornosti za proširenje opsega na $I_{max1} = 30 \text{ mA}$, $I_{max2} = 50 \text{ mA}$ i $I_{max3} = 100 \text{ mA}$. Kako je potrebno vezati ovaj šant?

Rešenje 5. zadatka:

Šant se kod povećanja strujnog mernog opsega instrumenta sa pokretnim kalemom vezuje paralelno. Vrednost šanta se može izračunati prema formuli: $R_{si} = R_A I_{max} / (I_{maxi} - I_{max})$ i za opsege od 30 mA, 50 mA i 100 mA, dobija se da su šantovi jednaki 150 Ω , 75 Ω i 33.3 Ω .

"Nove" vrednosti unutrašnjih otpornosti se mogu naći prema formuli $R_{Ai} = R_A R_{si} / (R_A + R_{si})$, pa su za strujne opsege od 30 mA, 50 mA i 100 mA, "nove" unutrašnje otpornosti jednake 100 Ω , 60 Ω i 30 Ω .

Kod instrumenta sa pokretnim kalemom se može zaključiti da se sa povećanjem opsega smanjuje vrednost šanta, ali i da se smanjuje i vrednost unutrašnje otpornosti novog "šantiranog" instrumenta.

6. Ako se napon oblika $u(t) = 2 + \cos 2\pi ft$ [V], gde je $f = 100 \text{ Hz}$ dovodi na ulaze instrumenta sa pokretnim kalemom koji meri napon i instrumenta sa pokretnim gvožđem koji meri napon, kolika su pokazivanja instrumenata? Pretpostaviti da se uticaj unutrašnjih otpornosti instrumenata može zanemariti tj. da je unutrašnja otpornost ovih instrumenata beskonačna. Koliku vrednost će pokazivati instrument sa pokretnim kalemom, ako je prethodno signal "prošao" kroz kolo za dvostrano ispravljanje pod pretpostavkom da su diode idealne?

Rešenje 6. zadatka:

Instrumenti za merenje napona sa pokretnim kalemom i sa pokretnim gvožđem su prikazani na naslovnoj strani ovog dokumenta. Voltmetar sa pokretnim kalemom prikazuje srednju vrednost signala, odnosno

$$U_{sr} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt = 2 \text{ V.}$$

Voltmetar sa pokretnim gvožđem prikazuje efektivnu vrednost napona (*True RMS*):

$$U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (2 + \cos 2\pi ft)^2 dt} = 2.12 \text{ V}$$

Voltmetar sa pokretnim kalemom i dvostranim ispravljanjem prikazuje srednju vrednost dvostrano ispravljenog signala tj. $U = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$, a kako je ovaj signal uvek veći od 0, to je onda srednja vrednost dvostrano ispravljenog signala jednaka srednjoj vrednosti signala.

7. Kolika bi trebalo da bude frekvencija odabiranja za sledeće signale tj. napone koji se mere sa A/D konvertorom? Da li je ove signale moguće izmeriti sa A/D konvertorom čiji je propusni opseg (najveća frekvencija odabiranja) jednaka 20 kHz / kSs / kSPS?

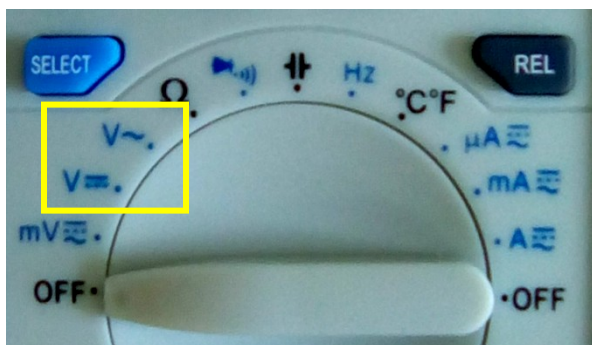
- govorni/audio signal u opsegu frekvencija 20 Hz do 20 kHz
- EKG (elektrokardiografski) signal koji je u opsegu od 0.5 do 100 Hz

- temperatura u sobi
- 20 kanala EMG (elektromiografskih) signala koji se nalaze u opsegu frekvencija od 0.5 do 500 Hz.

Rešenje 7. zadatka:

Pogledati Nikvist-Šenonovu teoremu u udžbeniku N. Miljković "Metode i instrumentacija za električna merenja", 2016, ISBN: 978-86-7225-057-2 i prezentacije sa predavanja na sajtu predmeta: <https://automatika.etf.bg.ac.rs/sr/13e053msr>.

8. Na Sl. 4 je prikazan DMM. Koje vrednosti napona se mere u tačkama koje su označene na instrumentu? Objasniti kako se to razlikuje u odnosu na prethodni zadatak?

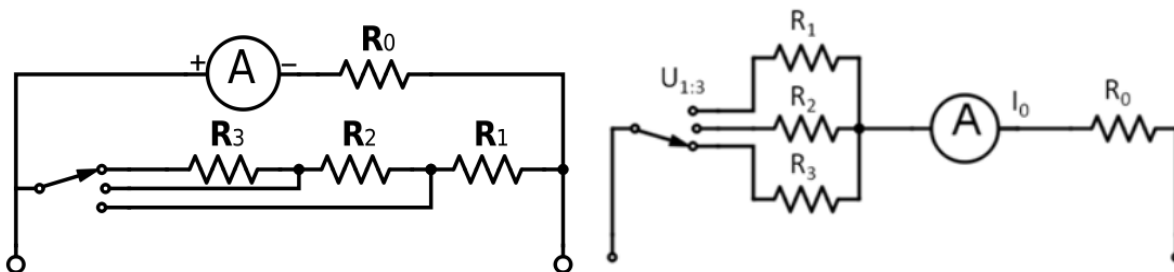


Sl. 4, Korisnički interfejs DMMa peakTech 2015. Slikano u laboratoriji 69 na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu.

Rešenje 8. zadatka:

U položaju za merenje naizmeničnog tj. AC napona meri se efektivna vrednost, a u položaju za merenje jednosmernog tj. DC napona meri se srednja vrednost.

9. Za ampermetar koji može da meri maksimalnu struju od $I_{max} = I_0 = 1 \text{ mA}$ i koji ima unutrašnju otpornost od $R_0 = 200 \Omega$, odrediti vrednost šantova na Sl. 5 na levom i desnom panelu, tako da instrument može da meri: $I_{max1} = 15 \text{ mA}$, $I_{max2} = 20 \text{ mA}$, $I_{max3} = 30 \text{ mA}$, $U_{max1} = 10 \text{ V}$, $U_{max2} = 20 \text{ V}$ i $U_{max3} = 50 \text{ V}$, respektivno.



Sl. 5, Realizacija instrumenata sa pokretnim kalemom za merenje struje i napona primenom šantova je prikazana na levom i desnom panelu, respektivno. Slike su preuzete iz udžbenika: N. Miljković, Metode i instrumentacija za električna merenja, Univerzitet u Beogradu – Elektrotehnički fakultet, 2016, ISBN: 978-86-057-2, doi: [10.5281/zenodo.1335250](https://doi.org/10.5281/zenodo.1335250)

Rešenje 9. zadatka (proširenje mernog opsega za merenje struje):

Za šant R_s koji se dodaje paralelno kako bi se povećala struja sa I_{max} na $I_{max\ 1}$, važi da je jednak: $R_s = \frac{R_0 I_{max}}{(I_{max\ 1} - I_{max\ 2})}$, odnosno da bi se opseg proširio na 15 mA, 20 mA i 30 mA, potrebni su sledeći šantovi $R_{s1} = 14.3\ \Omega$, $R_{s2} = 10.5\ \Omega$ i $R_{s3} = 6.9\ \Omega$, redom.

Sa levog panela na Sl. 4 se vidi da je moguća sledeća realizacija: $R_{s1} = R_1 + R_2 + R_3$, $R_{s2} = R_1 + R_2$ i $R_{s3} = R_1$, odnosno $R_1 = 6.9\ \Omega$, $R_2 = 3.6\ \Omega$ i $R_3 = 3.8\ \Omega$.

Rešenje 9. zadatka (proširenje mernog opsega za merenje napona tj. realizacija voltmetra sa pokretnim kalemom):

Za šant R_s koji se dodaje redno kako bi se povećao napon na instrumentu maksimalne struje I_{max} na $U_{max\ 1}$, važi da je jednak: $R_s = \frac{U_{max\ 1}}{I_{max}} - R_0$, odnosno da bi se opseg proširio na 10 V, 20 V i 50 V, potrebni su sledeći šantovi $R_{s1} = 9800\ \Omega$, $R_{s2} = 19800\ \Omega$ i $R_{s3} = 49800\ \Omega$, redom.

Ovi šantovi su ujedno jednaki otpornostima sa šeme na desnom panelu na Sl. 4: $R_1 = 9800\ \Omega$, $R_2 = 19800\ \Omega$ i $R_3 = 49800\ \Omega$.

Primetiti da se otpornost šanta smanjuje kako se povećava maksimalan strujni opseg, a da se otpornost šanta povećava kako se povećava maksimalni naponski opseg mernog instrumenta sa pokretnim kalemom. Odnosno, postoje praktična ograničenja u realizaciji "velikih" i "malih" otpornosti, pa samim tim i ograničenja u realizaciji različitih opsega.